

MI and Phase Field Structure

Multiplicative-Invariant Completion of the Substantive Complex Quaternionic Phase Space

Jason Kuhyun Ryoo

InnoLab Science Institute (ISI)
Complex Oscillator Dynamics (COD) Research Group

Abstract

Complex Oscillator Dynamics (COD) does not assume inertia to be an independent fundamental force.

Within COD, a massive body consists of a real standing-wave core and a substantive complex phase space surrounding it.

The fundamental structure of existence is

$$S = P + iQ$$

where

P = real standing-wave core

Q = substantive surrounding complex phase space.

Therefore,

$$\text{Phase Field} = Q$$

$$\text{Inertia} = \text{MI Self-Preservation of } Q$$

The conventional real and linear radii R and r are not regarded as the complete physical space itself, but rather as algebraic projection scales representing complex quaternionic phase space through real metrics.

Within COD, the physically completed spatial structure includes the three-dimensional complex quaternionic phase-space norms

R_Φ, r_Φ

together with

phase,

wavenumber,

density.

Accordingly, the central structure of this study is

Mass

↕

Quaternionic Phase-Space Norm

↕

Phase Wavenumber

↕

Phase Density

↕

Multiplicative-Invariant Closure

Inertia is interpreted as the property by which this entire substantive phase-space structure preserves its own self-consistency under time-independent phase equilibrium.

1. Complex Structure of Existence

The fundamental complex-energy structure of COD is

$$S = P + iQ.$$

Here,

P = condensed real standing-wave core

iQ = substantive complex phase space.

Therefore,

Massive Existence

Real Core
+
Substantive Phase Space

The complex quaternionic structure is expressed as

$$Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$$

or

$$Q = Q_0 + Q_{\text{vec}}$$

where

$$Q_{\text{vec}} = Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k.$$

Here,

Q_0 = real/core component

Q_{vec} = surrounding noncommutative phase geometry.

Therefore, a massive body is not completed by the real core alone.

Complete Massive Existence

Real Standing-Wave Core
+
Substantive Surrounding Phase Space

In the previously developed inertial-field structure, the Phase Field is Q , and inertia is defined as the property by which this substantive phase space preserves the self-consistency of the core through MI phase equilibrium.

2. Real and Linear Multiplicative-Invariant Representation

The basic COD mass-space multiplicative-invariant relation is

$$M / M_T = r_0 / R.$$

Equivalently,

$$M R = M_T r_0.$$

Therefore,

$$r_0 = (R / M_T) M$$

and

$$M = (M_T / R) r_0.$$

Here,

M = local mass

M_T = global reference mass

R = global reference radius

r_0 = local intrinsic MI metric scale.

Define

$$\mu = M_T / R$$

$$\mu^{(-1)} = R / M_T.$$

Then,

$$M = \mu r_0$$

$$r_0 = \mu^{(-1)} M$$

and

$$\mu \cdot \mu^{(-1)} = 1.$$

Therefore, mass and spatial scale are not two independently given physical quantities, but complementary measures representing the same multiplicative-invariant relation in opposite directions.

3. From Linear Radius to Complex Quaternionic Phase Radius

R and r_0 are real and linear metric scales.

However, they do not by themselves represent the complete substantive physical space.

Let the three-axis complex quaternionic phase space be

$$r_{\Phi_vec} = r_1 i + r_2 j + r_3 k.$$

Its phase-space norm is

$$r_{\Phi} = \|r_{\Phi_vec}\|.$$

Thus,

$$r_{\Phi} = \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)}.$$

Likewise, for the global space,

$$R_{\Phi} = \|R_{\Phi_vec}\|.$$

For an isotropic three-axis structure,

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_0.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} r_{\Phi} &= \sqrt{(r_0^2 + r_0^2 + r_0^2)} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{3} r_0.$$

Hence,

$$r_{\Phi} = \sqrt{3} r_0.$$

If the same normalization is applied globally,

$$R_{\Phi} = \sqrt{3} R_0.$$

Therefore, $\sqrt{3}$ is not an arbitrary correction factor.

It can be interpreted as the geometric coefficient that appears when a one-dimensional intrinsic metric scale is completed as the norm of a three-axis complex quaternionic phase space.

4. Completed Form of Complex Quaternionic MI

The real and linear MI representation is

$$M / M_T = r_0 / R.$$

Extending this into complex quaternionic phase space gives

$$M / M_T = \|r_\Phi\| / \|R_\Phi\|.$$

That is,

$$M \|R_\Phi\| = M_T \|r_\Phi\|.$$

Therefore,

Linear MI Geometry

→

Quaternionic MI Geometry

and

(R, r_0)

→

$(R_\Phi, r_\Phi).$

R and r_0 are not discarded.

They are the real and linear metric projections of the complex quaternionic phase space,

while

R_Φ and r_Φ are the three-dimensional complex quaternionic norms of that space.

5. Phase Space as a Physical Entity

A substantive physical space cannot be fully defined by radius alone.

The COD phase field is written as

$$\Psi_\Phi(r) = A_\Phi(r) \exp[i\Phi(r)].$$

Here,

$A_\Phi(r)$ = phase-field amplitude

$\Phi(r)$ = spatial phase.

The phase wavenumber or phase gradient is defined as

$$k_\Phi = |\nabla\Phi|.$$

Therefore, k_Φ is not merely an algebraic inverse length.

It represents the spatial rate of phase variation within a substantive phase space.

A structural indicator of phase-energy density may be written as

$$\rho_\Phi \propto A_\Phi^2 |\nabla\Phi|^2$$

or

$$\rho_\Phi \propto A_\Phi^2 k_\Phi^2.$$

The exact physical proportionality coefficient and dimensional normalization, however, must be determined separately.

Thus, the state of a substantive phase space can be represented at minimum as

$$P_\Phi = (r_\Phi, k_\Phi, \rho_\Phi, \Phi).$$

Therefore,

Physical Phase Space

≠

Empty Geometrical Radius.

More precisely,

Physical Phase Space

Finite Quaternionic Spatial Structure

+

Phase

+

Wavenumber

+
Density.

6. General Multiplicative-Invariant Closure

The general COD Constant System relation is

$$\kappa_n r_n = C_n.$$

Applied to substantive complex quaternionic phase space,

$$k_{\Phi,n} r_{\Phi,n} = C_{\Phi,n}.$$

Here,

$k_{\Phi,n}$ = phase wavenumber of the n-th mode

$r_{\Phi,n}$ = complex quaternionic phase-space norm of the n-th mode

$C_{\Phi,n}$ = dimensionless MI phase-equilibrium eigenvalue.

Therefore,

$$r_{\Phi,n} = C_{\Phi,n} / k_{\Phi,n}$$

and

$$k_{\Phi,n} = C_{\Phi,n} / r_{\Phi,n}.$$

For the same closure mode with constant $C_{\Phi,n}$,

$$k_{\Phi} \uparrow \leftrightarrow r_{\Phi} \downarrow$$

and

$$k_{\Phi} \downarrow \leftrightarrow r_{\Phi} \uparrow.$$

The preserved essence is not either variable independently, but their multiplicative relation.

$$I_{MI} = k_{\Phi} r_{\Phi}.$$

Therefore,

$$I_{MI} = C_{\Phi}.$$

Thus,

$$k_{\Phi} r_{\Phi} = C_{\Phi}$$

is the fundamental MI closure of substantive complex quaternionic phase space.

7. Mass–Phase-Space Multiplicative Invariance

In the real and linear representation,

$$M \leftrightarrow r_0.$$

In the complex quaternionic completion,

$$M \leftrightarrow r_{\Phi}.$$

However, since substantive phase space is not composed of radius alone, the more complete relation is

$$\begin{aligned} M \\ \leftrightarrow \\ (r_{\Phi}, k_{\Phi}, \rho_{\Phi}, \Phi). \end{aligned}$$

Therefore, a change in mass is not merely a change in geometrical radius.

Mass Change

→

Quaternionic Phase-Space Reorganization.

This reorganization must preserve the MI closure

$$k_{\Phi} r_{\Phi} = C_{\Phi}.$$

Therefore,

Mass Structure

↔

Phase-Space Structure.

8. Multiplicative-Invariant Definition of Inertia

Let the Phase Field be

$$I_\Phi = Q.$$

That is,

Phase Field

Substantive Complex Phase Space.

Inertia is therefore

Inertia

MI Self-Preservation of I_Φ .

The COD time-independent phase-equilibrium condition is

$$\Delta(\Delta\Phi) \rightarrow 0.$$

For a multi-oscillator system,

$$\Delta(\Delta\Phi_{ij}) \rightarrow 0.$$

The important point is that

$$\Delta\Phi_{ij} \rightarrow 0$$

is not required.

That is,

$$\Delta\Phi_{ij} \neq 0$$

while

$$\Delta(\Delta\Phi_{ij}) \rightarrow 0$$

is possible.

Therefore, the Phase Field is not a space that homogenizes all local phases into one.

It is a phase space that preserves non-zero relative phases while minimizing relational imbalance and maintaining the total MI structure self-consistently.

9. Definition of Inertial-Field Growth

Inertial-field growth should not be defined simply as

$$r_{\Phi} \uparrow.$$

Let the complete inertial state be

$$I_{\Phi} = F(r_{\Phi}, k_{\Phi}, \rho_{\Phi}, \Phi).$$

Then,

Inertial-Field Growth

MI-Preserving Reorganization
of the Substantive Quaternionic Phase Field.

That is, if

$$M \rightarrow M',$$

then the corresponding phase-space structure changes as

$$P_{\Phi} \rightarrow P'_{\Phi},$$

where

$$P_{\Phi} = (r_{\Phi}, k_{\Phi}, \rho_{\Phi}, \Phi)$$

$$P'_{\Phi} = (r'_{\Phi}, k'_{\Phi}, \rho'_{\Phi}, \Phi).$$

At the same time, for the corresponding closure mode,

$$k_{\Phi} r_{\Phi} = C_{\Phi}$$

$$k'_{\Phi} r'_{\Phi} = C'_{\Phi}.$$

If the same eigenmode is preserved,

$$C'_{\Phi} = C_{\Phi},$$

and therefore

$$k_{\Phi} r_{\Phi} = k'_{\Phi} r'_{\Phi} = C_{\Phi}.$$

Thus,

Mass Growth

↔

Phase-Space Reorganization.

In other words, inertial-field growth is not simply spatial expansion.

It is the joint reorganization of density, wavenumber, phase radius, and phase relation while preserving multiplicative invariance.

10. Distinction Between Intrinsic Inertial Scale and Phenomenal Inertial-Field Extension

The complex quaternionic intrinsic phase radius

$$r_{\Phi}$$

must be distinguished from the realized inertial-field extension

$$d_I$$

appearing in macroscopic motion.

In the previously proposed inertial-field model, for an elliptical orbit,

$$d_I = ae$$

where

a = semi-major axis

e = orbital eccentricity

d_I = realized inertial-field radial thickness.

Therefore,

$$r_\Phi \neq d_I.$$

Instead,

r_Φ = intrinsic quaternionic MI scale

d_I = phenomenally realized inertial-field extension.

Thus,

Intrinsic MI Geometry

→

Phase-Field Realization

→

Observable Motion.

Accordingly, a candidate expansion ratio may be defined as

$$\Gamma_\Phi = d_I / r_\Phi.$$

For an elliptical orbit,

$$\Gamma_\Phi = ae / r_\Phi.$$

However, the universal physical meaning of Γ_Φ and the independent predictive power of $d_I = ae$ remain subjects for separate data-based verification.

11. Spherical Orthogonal Structure of Gravity and Inertia

At a point p on the sphere S^2 ,

$$N_p S^2 \perp T_p S^2.$$

That is,

Normal Space

$\perp$

Tangential Space.

Within COD, radial Self-MI centered on the massive core Q_0 is interpreted as the gravitational sector.

$$G = \text{SelfMI}_r(Q_0).$$

Meanwhile,

$$I_\Phi = Q_{\text{vec}}$$

with

$$I_\Phi \in T_p S^2.$$

Therefore,

$$\text{Gravity Sector} = \text{Radial Normal Sector}$$

$$\text{Inertial Sector} = \text{Tangential Phase-Space Sector}.$$

Thus, the essential meaning of

$$G \perp I_\Phi$$

is

$$N_p S^2 \perp T_p S^2.$$

Therefore, gravity–inertia orthogonality is not an arbitrarily imposed 90-degree relation between two vectors.

It is interpreted as the intrinsic geometric relation between the radial normal sector and the tangential sector of spherical phase space.

12. Ordered Noncommutativity of the Phase Field

For complex quaternionic phase directions q_a and q_b ,

$$q_a q_b$$

- $q_a \cdot q_b$

•

$$q_a \times q_b$$

while

$$q_b q_a$$

$$\begin{aligned} & \bullet \quad q_a \cdot q_b \\ & \bullet \end{aligned}$$

$$q_a \times q_b.$$

Therefore,

$$q_a q_b \neq q_b q_a.$$

The commutator is

$$[q_a, q_b]$$

$$q_a q_b - q_b q_a.$$

Hence,

$$[q_a, q_b]$$

$$2(q_a \times q_b).$$

Therefore,

$$[q_a, q_b] \neq 0.$$

However,

Non-Commutativity

$\neq$

Disorder.

The COD Phase Field has the structure

Ordered Non-Commutativity

+

MI Phase Equilibrium.

That is, equilibrium is not achieved by eliminating noncommutativity.

Instead, the system preserves noncommutative directional structure while maintaining global multiplicative-invariant phase equilibrium.

13. Phase Field, Phase Field, and Surrounding Space

The same substantive Q structure can be expressed from different viewpoints as

Q

Phase Field

Phase Field

Local Surrounding Space.

However, this does not mean that the three concepts are literally identical in every semantic sense.

Phase Field

Q viewed from the perspective of phase relations

Phase Field

Q viewed from the perspective of self-preservation

Local Surrounding Space

Q viewed from the perspective of spatial realization of existence.

Therefore,

Massive Body

Core
+
Its Substantive Phase Space.

Thus, a massive body is not merely a point particle located in a pre-existing empty space.

It is interpreted as an existence structure containing both its real core and its own corresponding substantive phase space.

14. Distinction Between Phase Field and Spin

The Phase Field and Spin are not identical.

Phase Field $\neq$ Spin.

Their common foundation is

MI Geometry

↓

Complex Spherical Phase Geometry.

After this, the structure branches in two directions.

MI Geometry

↓

Complex Spherical Phase Geometry

↓

↓↓

Substantive Phase Space Geodesic Closure

↓↓

Phase Field Spin

↓↓

Self-Preservation Rotational Manifestation

Thus, the inertial-field theory asks

What is the surrounding physical phase space?

whereas the Spin structure asks

How does the phase geometry realize rotational closure?

Therefore, the Phase Field and Spin are not identical concepts that generate one another.

They are complementary structures emerging from the same MI complex spherical phase geometry.

15. Connection to the COD Time-Independent Constant System

The general COD Constant System relation is

$$\kappa_n r_n = C_n.$$

When completed in complex quaternionic physical space, this becomes

$$k_{\Phi,n} r_{\Phi,n} = C_{\Phi,n}.$$

Therefore, the entire hierarchy is

$$\Delta(\Delta\Phi) \rightarrow 0$$

↓

Time-Independent Phase Equilibrium

↓

Multiplicative Invariance

↓

$$k_{\Phi} r_{\Phi} = C_{\Phi}$$

↓

Quaternionic Eigengeometry

↓

Dimensional Physical Projection

↓

Natural Constants / Mass-Space Relations / Physical Laws.

Thus, the Constant System and the Phase Field Structure can be interpreted not as two independent principles, but as different physical expressions of the same general MI structure.

General MI Geometry

↓

↓ ↓
 Constant System Phase Field
 ↓ ↓
 Eigenvalue Structure Substantive Phase Space
 ↓ ↓
 Dimensional Projection Physical Field Realization

That is,

Constant System

eigenvalue and dimensional projection structure of MI geometry

Phase Field

substantive spatial realization of MI geometry.

16. Representative Formula Set

The full structure can be compressed into the following minimal formulas.

[Complex Existence]

$$S = P + iQ$$

[Complex Quaternion Structure]

$$Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$$

[Phase Field]

$$\Psi_\Phi(r) = A_\Phi(r) \exp[i\Phi(r)]$$

[Phase Wavenumber]

$$k_\Phi = |\nabla\Phi|$$

[Quaternionic Phase Radius]

$$\mathbf{r}_\Phi$$

$$\sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)}$$

[Isotropic Three-Axis Geometry]

$$r_\Phi = \sqrt{3} r_0$$

[Linear Mass-Space MI]

$$M / M_T = r_0 / R$$

[Reciprocal MI]

$$\mu = M_T / R$$

$$\mu^{(-1)} = R / M_T$$

$$\mu \mu^{(-1)} = 1$$

[Quaternionic Mass-Space MI]

$$\mathbf{M} / \mathbf{M}_T$$

$$\|r_\Phi\| / \|R_\Phi\|$$

[Phase-Density Structure]

$$\rho_\Phi \propto A_\Phi^2 k_\Phi^2$$

[General Physical MI Closure]

$$k_\Phi r_\Phi = C_\Phi$$

[Time-Independent Phase Equilibrium]

$$\Delta(\Delta\Phi) \rightarrow 0$$

[Multi-Oscillator Phase Equilibrium]

$$\Delta(\Delta\Phi_{ij}) \rightarrow 0$$

[Phase Field]

$$I_\Phi = Q$$

[Inertia]

Inertia

MI Self-Preservation of Q

[Gravity]

$$G = \text{SelfMI}_r(Q_0)$$

[Spherical Orthogonality]

$$N_p S^2 \perp T_p S^2$$

[Ordered Non-Commutativity]

$$[q_a, q_b]$$

$$\frac{2(q_a \times q_b)}{\neq 0}$$

[Phenomenal Inertial Extension]

$$d_I = ae$$

[Candidate Field-Expansion Ratio]

$$\Gamma_\Phi = d_I / r_\Phi$$

17. Integrated Structure

The entire theory may be expressed in one flow as

Complex Energy

↓

$$S = P + iQ$$

↓

Complex Quaternion Geometry

↓

$$Q = Q_0 + Q_{\text{vec}}$$

↓

Substantive Phase Space

↓

$$(r_\Phi, k_\Phi, \rho_\Phi, \Phi)$$

$\downarrow$
 Multiplicative Invariance
 $\downarrow$
 $k_\Phi r_\Phi = C_\Phi$
 $\downarrow$
 Time-Independent Phase Equilibrium
 $\downarrow$
 $\Delta(\Delta\Phi) \rightarrow 0$
 $\downarrow$
 Self-Coherent Physical Existence.

From the mass-space direction,

Mass M
 $\updownarrow$
 Linear MI
 $\updownarrow$
 r_0
 $\downarrow$
 Quaternionic Completion
 $\downarrow$
 r_Φ
 $\updownarrow$
 k_Φ, ρ_Φ, Φ
 $\downarrow$
 Substantive Phase Space Q
 $\downarrow$
 Phase Field
 $\downarrow$
 MI Self-Preservation
 $\downarrow$
 Inertia.

18. Conclusion

The most important distinction in this study is

R, r_0

Real / Linear Metric Representation

whereas

R_Φ, r_Φ

Three-Dimensional Quaternionic Phase-Space Norm.

That is,

R, r_0

do not represent the complete physical space itself.

They are real and linear metric representations of complex quaternionic space.

The substantive physical space possesses not only

R_Φ, r_Φ

but also

A_Φ

Φ

k_Φ

ρ_Φ .

Therefore, the physical completion of multiplicative invariance does not end with

$M / M_T = r_0 / R$.

The more complete structure is

Mass

$\updownarrow$

Quaternionic Phase-Space Norm

$\updownarrow$

Wavenumber

$\updownarrow$

Phase Density

$\updownarrow$

MI Closure.

Its central closure relation is

$k_\Phi r_\Phi = C_\Phi$.

Therefore, within COD, inertia can be defined as

Inertia

Multiplicative-Invariant Self-Preservation
of a Substantive Complex Quaternionic Phase Space.

In other words,

Inertia

the multiplicative-invariant self-preservation
of substantive complex quaternionic phase space.

Finally,

Complex Energy

→

Quaternionic Phase Space

→

Multiplicative-Invariant Geometry

→

Mass-Space Eigenstructure

→

Substantive Phase Field

→

Self-Coherent Physical Existence.

The previously established inertial-field hierarchy

MI Geometry

→

$S = P + iQ$

→

Real Core / Substantive Phase Space

→

Radial Self-MI / Tangential Phase Field

→

Gravity / Non-Commutative Inertia

→

MI Phase Balance

is preserved.

The present formulation advances this structure by specifying the Substantive Phase Space more explicitly as a physical complex quaternionic field carrying

r_Φ ,

k_Φ ,

ρ_Φ ,

and Φ .

Verification Boundary

At the current stage, the following two relations should be explicitly classified as COD constitutive hypotheses:

$$\rho_\Phi \propto A_\Phi^2 k_\Phi^2$$

$$M / M_T = \|r_\Phi\| / \|R_\Phi\|.$$

Therefore, these relations should not yet be treated as definitions or established theorems.

They remain subjects for future independent verification through QGE Clean Condition analysis and physical data.

MI 와 관성장 구조

실체적 복소 쿼터니언 위상공간의 승산불변적 완성

초록

Complex Oscillator Dynamics(COD)는 관성을 독립적인 기본 힘으로 가정하지 않는다.

COD 에서 질량체는 실수 정상파 코어와 이를 둘러싼 실체적 복소 위상공간으로 구성된다.

그 기본 존재구조는 다음과 같다.

$$S = P + iQ$$

여기서,

P = 실수 정상파 코어

Q = 실체적 주변 복소 위상공간

이다.

따라서,

$$\text{Phase Field} = Q$$

$$\text{Inertia} = Q \text{ 의 MI Self-Preservation}$$

으로 정의한다.

기존의 실수·선형 반경 R 과 r 은 완전한 물리적 공간 자체라기보다 복소 쿼터니언 위상공간을 실수 계량으로 표현한 대수적 투영척도이다.

COD 에서 물리적으로 완성된 공간구조는 3 차원 복소 쿼터니언 위상공간의 norm 인

R_Φ, r_Φ

와 그 공간이 가지는

phase,

wavenumber,

density

구조를 함께 포함한다.

따라서 본 연구의 중심구조는 다음과 같다.

Mass

↕

Quaternionic Phase-Space Norm

↕

Phase Wavenumber

↕

Phase Density

↕

Multiplicative-Invariant Closure

관성은 이 전체 실체적 위상공간 구조가 시간독립 위상평형 아래에서 자신의 자기정합성을 보존하는 성질로 해석된다.

1. 복소 존재구조

COD 의 기본 복소 에너지 구조는

$$S = P + iQ$$

이다.

여기서,

P = condensed real standing-wave core

iQ = substantive complex phase space

이다.

따라서,

Massive Existence

Real Core

+

Substantive Phase Space

이다.

복소 쿼터니언 구조로 표현하면,

$$Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$$

또는

$$Q = Q_0 + Q_{\text{vec}}$$

이며,

$$Q_{\text{vec}} = Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$$

이다.

여기서,

Q_0 = real/core component

Q_{vec} = surrounding noncommutative phase geometry

이다.

따라서 질량체는 실수 코어만으로 완성되지 않는다.

Complete Massive Existence

Real Standing-Wave Core

+

Substantive Surrounding Phase Space

이다.

기존 관성장 구조에서도 관성장은 Q 이며, 관성은 이 실체적 위상공간이 MI 위상평형을 통하여 코어의 자기정합성을 보존하는 성질로 정의되었다.

2. 실수·선형 승산불변 표현

COD의 기본적인 질량-공간 승산불변 관계는

$$M / M_T = r_0 / R$$

이다.

동등하게,

$$M R = M_T r_0$$

이다.

따라서,

$$r_0 = (R / M_T) M$$

이며,

$$M = (M_T / R) r_0$$

이다.

여기서,

M = 국소 질량

M_T = 전역 기준질량

R = 전역 기준반경

r_0 = 국소 MI 고유 계량척도

이다.

다음과 같이 정의하자.

$$\mu = M_T / R$$

$$\mu^{(-1)} = R / M_T$$

그러면,

$$M = \mu r_0$$

$$r_0 = \mu^{(-1)} M$$

이고,

$$\mu \cdot \mu^{(-1)} = 1$$

이다.

따라서 질량과 공간척도는 독립적으로 주어진 두 물리량이 아니라 동일한 승산불변 관계를 서로 다른 방향에서 표현한 상보적 계량이다.

3. 선형 반경에서 복소 쿼터니언 위상반경으로

R 과 r_0 는 실수·선형 계량척도이다.

그러나 이것만으로 실체적 물리공간 전체가 표현되는 것은 아니다.

복소 쿼터니언 3 축 위상공간을

$$r_{\Phi_vec} = r_1 i + r_2 j + r_3 k$$

라고 하자.

그 위상공간의 norm 은

$$r_{\Phi} = \|r_{\Phi_vec}\|$$

이다.

즉,

$$r_{\Phi} = \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)}$$

이다.

전역 공간에서도 마찬가지로,

$$R_{\Phi} = \|R_{\Phi_vec}\|$$

이다.

3 축이 등방적인 경우,

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_0$$

이므로,

$$r_{\Phi} = \sqrt{(r_0^2 + r_0^2 + r_0^2)}$$

$$= \sqrt{3} r_0$$

이다.

따라서,

$$\mathbf{r}_\Phi = \sqrt{3} \mathbf{r}_0$$

이다.

동일한 정규화가 전역 공간에도 적용된다면,

$$\mathbf{R}_\Phi = \sqrt{3} \mathbf{R}_0$$

이다.

따라서 $\sqrt{3}$ 은 임의의 보정계수가 아니라 1 차원 고유 계량척도가 3 축 복소 쿼터니언 위상공간의 norm 으로 완성될 때 발생하는 기하학적 계수로 해석할 수 있다.

4. 복소 쿼터니언 MI 의 완성형

실수·선형 MI 표현은

$$M / M_T = \mathbf{r}_0 / R$$

이다.

이를 복소 쿼터니언 위상공간으로 확장하면,

$$M / M_T = \|\mathbf{r}_\Phi\| / \|\mathbf{R}_\Phi\|$$

로 표현할 수 있다.

즉,

$$M \|\mathbf{R}_\Phi\| = M_T \|\mathbf{r}_\Phi\|$$

이다.

따라서,

Linear MI Geometry

→

Quaternionic MI Geometry

이며,

(R, r_0)

→

(R_Φ, r_Φ)

이다.

여기서 R 과 r_0 가 폐기되는 것은 아니다.

R 과 r_0 는 복소 쿼터니언 위상공간을 실수·선형 계량으로 나타낸 projection 이고,

R_Φ 와 r_Φ 는 그 공간의 3 차원 복소 쿼터니언 norm 이다.

5. 물리적 실체로서의 위상공간

실체적 물리공간이라면 반경만으로 완전히 정의될 수 없다.

COD 의 위상장을

$$\Psi_\Phi(r) = A_\Phi(r) \exp[i\Phi(r)]$$

로 나타낸다.

여기서,

$A_\Phi(r)$ = 위상장 진폭

$\Phi(r)$ = 공간 위상

이다.

위상 파수 또는 위상경사는

$$k_\Phi = |\nabla\Phi|$$

로 정의한다.

따라서 k_Φ 는 단순한 대수적 역길이가 아니라 실체적 위상공간의 공간적 위상변화율을 나타낸다.

위상 에너지 밀도의 구조적 지표는 예를 들어

$$\rho_\Phi \propto A_\Phi^2 |\nabla\Phi|^2$$

또는

$$\rho_\Phi \propto A_\Phi^2 k_\Phi^2$$

와 같이 나타낼 수 있다.

단, 이 식의 정확한 물리적 비례계수와 차원적 정규화는 별도로 결정되어야 한다.

따라서 실체적 위상공간의 상태는 최소한

$$P_\Phi = (r_\Phi, k_\Phi, \rho_\Phi, \Phi)$$

와 같이 표현할 수 있다.

즉,

Physical Phase Space

≠

Empty Geometrical Radius

이다.

보다 정확하게,

Physical Phase Space

Finite Quaternionic Spatial Structure

+

Phase

+

Wavenumber

+

Density

이다.

6. 일반 승산불변 폐합

COD Constant System 의 일반 승산불변 관계는

$$\kappa_n r_n = C_n$$

이다.

이를 실체적 복소 쿼터니언 위상공간에 적용하면,

$$k_{\Phi,n} r_{\Phi,n} = C_{\Phi,n}$$

이다.

여기서,

$k_{\Phi,n}$ = n 번째 모드의 위상 파수

$r_{\Phi,n}$ = n 번째 모드의 복소 쿼터니언 위상공간 norm

$C_{\Phi,n}$ = 무차원 MI 위상평형 고유값

이다.

따라서,

$$r_{\Phi,n} = C_{\Phi,n} / k_{\Phi,n}$$

이며,

$$k_{\Phi,n} = C_{\Phi,n} / r_{\Phi,n}$$

이다.

$C_{\Phi,n}$ 이 일정한 동일 폐합모드에서는,

$$k_{\Phi} \uparrow \leftrightarrow r_{\Phi} \downarrow$$

그리고,

$$k_{\Phi} \downarrow \leftrightarrow r_{\Phi} \uparrow$$

의 상보적 관계가 성립한다.

보존되는 본질은 각각의 변수가 아니라 그 승산관계이다.

$$I_{MI} = k_{\Phi} r_{\Phi}$$

따라서,

$$I_{MI} = C_{\Phi}$$

이다.

즉,

$$k_{\Phi} r_{\Phi} = C_{\Phi}$$

가 실체적 복소 쿼터니언 위상공간의 기본 MI closure 이다.

7. 질량-위상공간 승산불변

실수·선형 표현에서는,

$$M \leftrightarrow r_0$$

이다.

복소 쿼터니언 완성형에서는,

$$M \leftrightarrow r_\Phi$$

이다.

그러나 실체적 위상공간은 반경 하나만으로 구성되지 않으므로 더 완전하게는,

$$\begin{aligned} M \\ \leftrightarrow \\ (r_\Phi, k_\Phi, \rho_\Phi, \Phi) \end{aligned}$$

이다.

따라서 질량의 변화는 단순한 기하학적 반경 변화가 아니다.

Mass Change

→

Quaternionic Phase-Space Reorganization

이다.

그리고 이 재구성은

$$k_\Phi r_\Phi = C_\Phi$$

라는 MI closure 를 유지해야 한다.

따라서,

Mass Structure

↔

Phase-Space Structure

이다.

8. 관성의 승산불변적 정의

관성장을

$$I_\Phi = Q$$

라고 하자.

즉,

Phase Field

Substantive Complex Phase Space

이다.

관성은

Inertia

MI Self-Preservation of I_Φ

이다.

COD의 시간독립 위상평형 조건은

$$\Delta(\Delta\Phi) \rightarrow 0$$

이다.

다중진동자에서는,

$$\Delta(\Delta\Phi_{ij}) \rightarrow 0$$

이다.

여기서 중요한 것은,

$$\Delta\Phi_{ij} \rightarrow 0$$

을 요구하지 않는다는 것이다.

즉,

$$\Delta\Phi_{ij} \neq 0$$

인 상태에서도

$$\Delta(\Delta\Phi_{ij}) \rightarrow 0$$

이 가능하다.

따라서 관성장은 모든 국소 위상을 하나로 균질화하는 공간이 아니다.

비영 상대위상을 유지하면서 관계적 불균형을 최소화하고 전체 MI 구조를 자기정합적으로 보존하는 위상공간이다.

9. 관성장 성장의 정의

관성장의 성장을 단순히

$$r_\Phi \uparrow$$

로 정의해서는 안 된다.

관성장의 완전한 상태를

$$I_\Phi = F(r_\Phi, k_\Phi, \rho_\Phi, \Phi)$$

라고 하자.

그러면 관성장 성장은

Inertial-Field Growth

MI-Preserving Reorganization
of the Substantive Quaternionic Phase Field

이다.

즉,

$$M \rightarrow M'$$

이면 이에 대응하여

$$P_{\Phi} \rightarrow P'_{\Phi}$$

가 발생하며,

$$P_{\Phi} = (r_{\Phi}, k_{\Phi}, \rho_{\Phi}, \Phi)$$

$$P'_{\Phi} = (r'_{\Phi}, k'_{\Phi}, \rho'_{\Phi}, \Phi')$$

이다.

동시에 해당 폐합모드에서,

$$k_{\Phi} r_{\Phi} = C_{\Phi}$$

$$k'_{\Phi} r'_{\Phi} = C'_{\Phi}$$

가 성립한다.

동일 고유모드가 유지된다면,

$$C'_{\Phi} = C_{\Phi}$$

이므로,

$$k_{\Phi} r_{\Phi} = k'_{\Phi} r'_{\Phi} = C_{\Phi}$$

이다.

따라서,

Mass Growth

↔

Phase-Space Reorganization

이다.

즉, 관성장 성장은 단순한 공간 팽창이 아니라 밀도, 파수, 위상반경 및 위상관계가 MI 를 유지하면서 함께 재구성되는 과정이다.

10. 고유 관성척도와 현상적 관성장(위상장) 전개의 구별

복소 쿼터니언 고유 위상반경

r_Φ

와 실제 거시적 운동공간에서 나타나는 관성장의 전개척도

d_I

는 구별되어야 한다.

기존 관성장 모델에서는 타원궤도에 대해,

$d_I = ae$

로 정의하였다.

여기서,

a = semi-major axis

e = orbital eccentricity

d_I = realized inertial-field radial thickness

이다.

따라서,

$$r_\Phi \neq d_I$$

이다.

r_Φ = intrinsic quaternionic MI scale

d_I = phenomenally realized inertial-field extension

이다.

즉,

Intrinsic MI Geometry

→

Phase-Field Realization

→

Observable Motion

의 순서를 갖는다.

이에 따라 후보 전개비를

$$\Gamma_\Phi = d_I / r_\Phi$$

로 정의할 수 있다.

타원궤도에서는,

$$\Gamma_\Phi = ae / r_\Phi$$

이다.

단, Γ_Φ 의 보편적 물리적 의미와 $d_I = ae$ 의 독립적 예측력은 별도의 데이터 검증 대상이다.

11. 중력-관성장의 구형 직교구조

구면 S^2 의 한 점 p 에서,

$$N_p S^2 \perp T_p S^2$$

이다.

즉,

$$\begin{array}{c} \text{Normal Space} \\ \perp \\ \text{Tangential Space} \end{array}$$

이다.

COD에서는 질량체 중심 Q_0 의 radial Self-MI를 중력 sector로 해석한다.

$$G = \text{SelfMI}_r(Q_0)$$

반면,

$$I_\Phi = Q_{\text{vec}}$$

이며,

$$I_\Phi \in T_p S^2$$

이다.

따라서,

$$\text{Gravity Sector} = \text{Radial Normal Sector}$$

$$\text{Inertial Sector} = \text{Tangential Phase-Space Sector}$$

이다.

즉,

$$G \perp I_\Phi$$

의 본질적 의미는

$$N_p S^2 \perp T_p S^2$$

이다.

따라서 중력-관성 직교성은 임의로 부여한 두 벡터의 90° 관계가 아니라 구형 위상공간의 radial normal sector 와 tangential sector 사이의 본질적 기하관계로 해석된다.

12. 관성장의 질서 있는 비가환성

복소 쿼터니언 위상방향 q_a 와 q_b 에 대해,

$$q_a q_b$$

- $q_a \cdot q_b$
-

$$q_a \times q_b$$

이고,

$$q_b q_a$$

- $q_a \cdot q_b$
-

$$q_a \times q_b$$

이다.

따라서,

$$q_a q_b \neq q_b q_a$$

이다.

commutator 는

$$[q_a, q_b]$$

$$q_a q_b - q_b q_a$$

따라서,

$$[q_a, q_b]$$

$$2(q_a \times q_b)$$

이다.

즉,

$$[q_a, q_b] \neq 0$$

이다.

그러나,

Non-Commutativity

$\neq$

Disorder

이다.

COD 관성장은

Ordered Non-Commutativity

+

MI Phase Equilibrium

구조를 갖는다.

즉 비가환성을 제거해서 평형을 만드는 것이 아니라, 비가환적 방향성을 유지한 상태에서 전체 승산불변 위상평형을 형성한다.

13. 위상장, 관성장, 주위공간

동일한 실체적 Q 구조는 서로 다른 관점에서 다음과 같이 표현된다.

Q

Phase Field

Phase Field

Local Surrounding Space

그러나 이것은 세 개념이 모든 의미에서 문자 그대로 동일하다는 뜻은 아니다.

Phase Field

Q 를 위상관계에서 본 표현

Phase Field

Q 를 자기보존에서 본 표현

Local Surrounding Space

Q 를 존재의 공간적 전개에서 본 표현

이다.

따라서,

Massive Body

Core

+

Its Substantive Phase Space

이다.

즉 질량체는 이미 존재하는 빈 공간 안에 놓여 있는 단순한 점입자가 아니라, 자신의 실수 코어와 그에 대응하는 실체적 위상공간을 함께 갖는 존재구조로 해석된다.

14. 관성장과 Spin 의 구별

관성장과 Spin 은 동일하지 않다.

Phase Field $\neq$ Spin

이다.

두 구조의 공통 기반은,

MI Geometry

↓

Complex Spherical Phase Geometry

이다.

그 이후 두 방향으로 분기된다.

MI Geometry

↓

Complex Spherical Phase Geometry

↓

↓

Substantive Phase Space Geodesic Closure

↓

Phase Field Spin

↓

Self-Preservation Rotational Manifestation

따라서 관성장 이론이 묻는 질문은,

What is the surrounding physical phase space?

이고,

Spin 구조론이 묻는 질문은,

How does the phase geometry realize rotational closure?

이다.

따라서 관장과 Spin 은 서로를 생성하는 동일 개념이 아니라 동일한 MI 복소
구형 위상기하에서 나타나는 상보적인 두 구조이다. 기존 관장 원고에서도 두
이론은 이와 같이 분리되어 있다.

15. COD 시간독립 자연상수 체계와의 연결

COD Constant System 의 일반식은

$$\kappa_n r_n = C_n$$

이다.

복소 쿼터니언 물리공간으로 완성하면,

$$k_{\Phi,n} r_{\Phi,n} = C_{\Phi,n}$$

이다.

따라서 전체 계층은,

$$\Delta(\Delta\Phi) \rightarrow 0$$

↓

Time-Independent Phase Equilibrium

↓

Multiplicative Invariance

↓

$$k_{\Phi} r_{\Phi} = C_{\Phi}$$

↓

Quaternionic Eigengeometry

↓

Dimensional Physical Projection

↓

Natural Constants / Mass-Space Relations / Physical Laws

이다.

따라서 Constant System 과 Phase Field Structure 는 서로 독립된 두 원리가 아니라 동일한 일반 MI 구조의 서로 다른 물리적 표현으로 해석할 수 있다.

General MI Geometry

↓

↓↓

Constant System Phase Field

↓↓

Eigenvalue Structure Substantive Phase Space

↓↓

Dimensional Projection Physical Field Realization

즉,

Constant System

MI 기하의 고유값 및 차원적 투영구조

Phase Field

MI 기하의 실체적 공간구현

이다.

16. 대표 수식

전체 구조를 최소 수식으로 압축하면 다음과 같다.

[Complex Existence]

$$S = P + iQ$$

[Complex Quaternion Structure]

$$Q = Q_0 + Q_1 i + Q_2 j + Q_3 k$$

[Phase Field]

$$\Psi_\Phi(r) = A_\Phi(r) \exp[i\Phi(r)]$$

[Phase Wavenumber]

$$k_\Phi = |\nabla\Phi|$$

[Quaternionic Phase Radius]

$$\mathbf{r}_\Phi$$

$$\sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)}$$

[Isotropic Three-Axis Geometry]

$$r_\Phi = \sqrt{3} r_0$$

[Linear Mass-Space MI]

$$M / M_T = r_0 / R$$

[Reciprocal MI]

$$\mu = M_T / R$$

$$\mu^{(-1)} = R / M_T$$

$$\mu \mu^{(-1)} = 1$$

[Quaternionic Mass-Space MI]

$$\mathbf{M} / \mathbf{M}_T$$

$$\|r_\Phi\| / \|R_\Phi\|$$

[Phase-Density Structure]

$$\rho_\Phi \propto A_\Phi^2 k_\Phi^2$$

[General Physical MI Closure]

$$k_\Phi r_\Phi = C_\Phi$$

[Time-Independent Phase Equilibrium]

$$\Delta(\Delta\Phi) \rightarrow 0$$

[Multi-Oscillator Phase Equilibrium]

$$\Delta(\Delta\Phi_{ij}) \rightarrow 0$$

[Phase Field]

$$I_\Phi = Q$$

[Inertia]

Inertia

MI Self-Preservation of Q

[Gravity]

$$G = \text{SelfMI}_r(Q_0)$$

[Spherical Orthogonality]

$$N_p S^2 \perp T_p S^2$$

[Ordered Non-Commutativity]

$$[q_a, q_b]$$

$$\begin{matrix} 2(q_a \times q_b) \\ \neq 0 \end{matrix}$$

[Phenomenal Inertial Extension]

$$d_I = ae$$

[Candidate Field-Expansion Ratio]

$$\Gamma_\Phi = d_I / r_\Phi$$

17. 통합 구조

전체 이론을 하나의 흐름으로 표현하면,

Complex Energy

↓

$$S = P + iQ$$

↓

Complex Quaternion Geometry

↓

$$Q = Q_0 + Q_{\text{vec}}$$

↓

Substantive Phase Space

↓

$$(r_\Phi, k_\Phi, \rho_\Phi, \Phi)$$

↓

Multiplicative Invariance

↓

$k_{\Phi} r_{\Phi} = C_{\Phi}$
 $\downarrow$
 Time-Independent Phase Equilibrium
 $\downarrow$
 $\Delta(\Delta\Phi) \rightarrow 0$
 $\downarrow$
 Self-Coherent Physical Existence

이다.

질량-공간 방향으로 보면,

Mass M
 $\updownarrow$
 Linear MI
 $\updownarrow$
 r_0
 $\downarrow$
 Quaternionic Completion
 $\downarrow$
 r_{Φ}
 $\updownarrow$
 $k_{\Phi}, \rho_{\Phi}, \Phi$
 $\downarrow$
 Substantive Phase Space Q
 $\downarrow$
 Phase Field
 $\downarrow$
 MI Self-Preservation
 $\downarrow$
 Inertia

이다.

18. 결론

본 연구에서 가장 중요한 구별은 다음과 같다.

R, r_0

Real / Linear Metric Representation

$\mathbf{R}_\Phi, \mathbf{r}_\Phi$

Three-Dimensional Quaternionic Phase-Space Norm

이다.

즉,

$\mathbf{R}, \mathbf{r}_0$

는 물리적 공간 전체가 아니라 복소 쿼터니언 공간의 실수·선형 계량표현이다.

실체적 물리공간은,

$\mathbf{R}_\Phi, \mathbf{r}_\Phi$

뿐만 아니라,

$\mathbf{A}_\Phi$

Φ

$\mathbf{k}_\Phi$

ρ_Φ

를 함께 갖는 위상장이다.

따라서 승산불변 구조의 물리적 완성은 단순히

$M / M_T = \mathbf{r}_0 / \mathbf{R}$

에 머무르지 않는다.

보다 완전한 구조는,

Mass



Quaternionic Phase-Space Norm

$\updownarrow$
 Wavenumber
 $\updownarrow$
 Phase Density
 $\updownarrow$
 MI Closure

이다.

그 중심 폐합식은,

$$k_{\Phi} r_{\Phi} = C_{\Phi}$$

이다.

따라서 COD 에서 관성은,

Inertia

Multiplicative-Invariant Self-Preservation
of a Substantive Complex Quaternionic Phase Space

로 정의할 수 있다.

즉,

관성

실체적 복소 쿼터니언 위상공간의
승산불변적 자기보존

이다.

최종적으로,

Complex Energy
 $\rightarrow$
 Quaternionic Phase Space
 $\rightarrow$

Multiplicative-Invariant Geometry

→

Mass-Space Eigenstructure

→

Substantive Phase Field

→

Self-Coherent Physical Existence

라는 구조가 성립한다.

이때 기존 관성장 원고에서 제시한 $MI\ Geometry \rightarrow S = P + iQ \rightarrow Real\ Core /$
 $Substantive\ Phase\ Space \rightarrow Radial\ Self-MI / Tangential\ Phase\ Field \rightarrow Gravity / Non-$
 $Commutative\ Inertia \rightarrow MI\ Phase\ Balance$ 의 계층은 그대로 유지되며, 이번
정리에서는 그 가운데 **Substantive Phase Space**를 $r_\Phi, k_\Phi, \rho_\Phi$ 를 가진 물리적
복소 쿼터니언 장으로 한 단계 구체화하였다.

본 연구는 COD에서의 관성이 독립적으로 가정된 근본적인 힘이 아니라, 질량을
가진 물체의 실제 정상파 핵을 둘러싼 실체적인 복소 사원수 위상 공간의 곱셈
불변 자기 보존이라고 제안합니다.

핵심적인 구분은 다음과 같습니다.

- R, r_0 — 실수/선형 계량 표현(대수적 투영)
- R_Φ, r_Φ — 3차원 사원수 위상 공간 노름(물리적으로 완전한 설명)

본 논문은 물리적 공간을 반지름만으로 환원할 수 없으며, 실체적인 위상 공간은
위상 공간 노름(r_Φ), 파수(k_Φ), 위상 밀도(ρ_Φ), 위상(Φ)의 네 가지 구성 요소를
필요로 한다고 주장합니다. 그 중심 폐쇄 관계는 $k_\Phi \cdot r_\Phi = C_\Phi$ 이며, 이는 선형
질량-공간 관계 $M/M_T = r_0/R$ 을 사원수 형태로 일반화한 것입니다.

중력과 관성은 동일한 구형 위상 구조(반경 방향 대 접선 방향)의 기하학적으로
직교하는 영역으로 해석되며, 사원수 위상 방향의 비가환성은 무질서가 아닌 질
서로 취급되어 전역 곱셈 불변 평형과 공존합니다.

검증 경계

현재 단계에서는 다음 두 가지 관계를 COD 구성 가설로 명시적으로 분류해야 합니다.

$$\rho_{\Phi} \propto A_{\Phi}^2 k_{\Phi}^2$$

$$M / M_T = \|r_{\Phi}\| / \|R_{\Phi}\|.$$

따라서 이러한 관계는 아직 정의 또는 확립된 정리로 취급해서는 안 됩니다.

이러한 관계는 향후 QGE 클린 조건 분석 및 물리적 데이터를 통한 독립적인 검증의 대상입니다.